4. Arithmétique

L'essentiel

- Soit a, b et n trois entiers non nuls tels que $n = a \times b$.

a et b sont des diviseurs de n ;

n est un multiple de a et de b.

- Le plus grand des diviseurs communs à deux entiers est leur PGCD.

Exemple :

Pour déterminer le PGCD de 238 et de 170, on peut utiliser l'algorithme d'Euclide :

a	b	r
238	170	68
170	68	34
68	34	0

$238 \div 170 = 1{,}4$
$r = 238 - 1 \times 170 = 68$
$170 \div 68 = 2{,}5$
$r = 170 - 2 \times 68 = 34$
$68 \div 34 = 2$
$r = 68 - 2 \times 34 = 0$

Le PGCD de 238 et de 170 vaut 34.

- Deux entiers dont le PGCD vaut 1 sont dits premiers entre eux.
- Une fraction $\frac{a}{b}$ avec a et b premiers entre eux est dite irréductible.

Exemple :

Le PGCD de 170 et de 238 vaut 34 donc 170 et 238 ne sont pas premiers entre eux et pour rendre irréductible la fraction $\frac{170}{238}$, on simplifie par 34. On obtient $\frac{170}{238} = \frac{34 \times 5}{34 \times 7} = \mathbf{\frac{5}{7}}$.

Test

1 **QCM** Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. 7 n'est pas un diviseur de :	**a.** 1	**b.** 7	**c.** 77	**d.** 91
2. Le nombre de diviseurs de 24 est :	**a.** 4	**b.** 6	**c.** 7	**d.** 8
3. Quel est le PGCD de 36 et 48 ?	**a.** 6	**b.** 12	**c.** 36	**d.** 48
4. Les nombres qui sont premiers entre eux sont :	**a.** 48 et 32	**b.** 25 et 130	**c.** 91 et 49	**d.** 101 et 15
5. La fraction qui n'est pas irréductible est :	**a.** $\frac{25}{31}$	**b.** $\frac{63}{56}$	**c.** $\frac{52}{75}$	**d.** $\frac{14}{15}$

Applications directes

2 Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.

1. Les nombres 570 et 795 sont premiers entre eux.

2. La somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5.

3 **1.** Sans aucun calcul, expliquer pourquoi on peut simplifier la fraction $\frac{4\,114}{7\,650}$.

2. Calculer le PGCD des nombres 4 114 et 7 650 avec la méthode de votre choix.

3. Rendre irréductible la fraction $\frac{4\,114}{7\,650}$ en précisant par quel nombre vous simplifiez.

4 **1.** Calculer PGCD $(972\,;648)$.
En déduire, l'écriture irréductible de la fraction $\frac{648}{972}$.

2. Prouver que $\sqrt{648} + \sqrt{972} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

5 **1.** En précisant la méthode utilisée, calculer le PGCD de 378 et 270.

2. Pour une kermesse, un comité des fêtes dispose de 378 billes et 270 calots.
Il veut faire le plus grand nombre de lots identiques en utilisant toutes les billes et tous les calots.

a. Combien de lots identiques pourra-t-il faire ?

b. Quelle sera la composition de chacun de ces lots ?

4. Arithmétique

Corrigés

Test

1 QCM

Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. On a $7 = 7 \times 1$, $77 = 7 \times 11$ et $91 = 7 \times 13$ donc 7 est un diviseur de 7, de 77 et de 91.
7 n'est pas un diviseur de 1 : réponse a.

2. On a : $24 = 1 \times 24 = 2 \times 12 = 3 \times 8 = 4 \times 6$. Le nombre de diviseurs de 24 est 8 : réponse d.

3. On utilise l'algorithme d'Euclide :

a	*b*	*r*
48	36	12
36	12	0

Le PGCD de 36 et 48 est 12 : réponse b.

4. 48 et 32 sont divisibles par 2 donc non premiers entre eux.
25 et 30 sont divisibles par 5 donc non premiers entre eux.
91 et 49 sont divisibles par 7 donc non premiers entre eux.
Le PGCD de 101 et de 15 vaut 1 donc 101 et 15 sont premiers entre eux : réponse d.

5. La fraction qui n'est pas irréductible est $\frac{63}{56}$ qu'on peut simplifier par 7 : réponse b.

Applications directes

2 1. Les nombres 570 et 795 sont deux nombres divisibles par 5.
Leur PGCD vaut au moins 5 : il est donc différent de 1. Les nombres 570 et 795 ne sont pas premiers entre eux. L'affirmation « Les nombres 570 et 795 sont premiers entre eux » est **fausse**.

2. Soit a et b deux multiples de 5.
Il existe deux entiers a' et b' tels que $a = 5a'$ et $b = 5b'$.
On a alors :
$a + b = 5a' + 5b' = 5(a' + b')$ avec $a' + b'$ qui est un entier.
$a + b$ est donc un multiple de 5.
L'affirmation « La somme de deux multiples de 5 est toujours un multiple de 5 » est **juste**.

3 1. 4 114 et 7 650 sont deux nombres pairs, donc ils sont divisibles par 2.
On peut simplifier la fraction $\frac{4\,114}{7\,650}$ au moins par 2.

2. On utilise l'algorithme d'Euclide.

a	*b*	*r*
7 650	4 114	3 536
4 114	3 536	578
3 536	578	68
578	68	34
68	34	0

Le PGCD des nombres 4 114 et 7 650 vaut 34.

3. Pour rendre irréductible la fraction $\frac{4\,114}{7\,650}$, on la simplifie par le PGCD de 4 114 et de 7 650, c'est-à-dire par 34.
On a : $\frac{4\,114}{7\,650} = \frac{34 \times 121}{34 \times 225} = \mathbf{\frac{121}{225}}$.

4 1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

a	*b*	*r*
972	648	324
648	324	0

Le PGCD de 972 et de 648 est 324.
On peut donc simplifier la fraction par 324, le PGCD de 648 et de 972.
On a $\frac{648}{972} = \frac{324 \times 2}{324 \times 3} = \mathbf{\frac{2}{3}}$.

2. On a : $\sqrt{648} + \sqrt{972} = \sqrt{324 \times 2} + \sqrt{324 \times 3}$
$= \sqrt{18^2 \times 2} + \sqrt{18^2 \times 3}$
$= 18\sqrt{2} + 18\sqrt{3}$.
On a bien $\sqrt{648} + \sqrt{972} = 18(\sqrt{3} + \sqrt{2})$.

5 1. On utilise l'algorithme d'Euclide :

a	*b*	*r*
378	270	108
270	108	54
108	54	0

Le PGCD de 378 et de 270 vaut 54.

2. a. Les lots devant être identiques, leur nombre doit diviser 378, le nombre de billes et 270, le nombre de calots. De plus, il doit être maximum : c'est donc le PGCD de 378 et de 270.
Le comité peut réaliser 54 lots.

b. On a : $378 \div 54 = 7$ et $378 \div 54 = 5$.
Chacun des lots sera composé de **7 billes et 5 calots**.