

5. Calcul littéral

L'essentiel

● Notations : $1x$ se note x ; $-1x$ se note $-x$; $x \times x$ se note x^2 .

● **Développer**, c'est transformer un produit en une somme algébrique. On peut utiliser les règles de distributivité :

$$a(b + c) = ab + ac ; \quad a(b - c) = ab - ac ; \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

On peut utiliser les identités remarquables :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 ; \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Exemple :

$A = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)^2$ Le signe « - » devant le carré porte sur tous les termes du développement.

$$= 24x^2 - 84x + 6x - 21 - [(2x)^2 - 2 \times 2x \times 7 + 7^2] \quad \text{Le carré de } 2x \text{ est } (2x)^2, \text{ soit } 4x^2.$$

$$= 24x^2 - 84x + 6x - 21 - 4x^2 + 28x - 49$$

$$A = 20x^2 - 50x - 70.$$

● **Factoriser**, c'est transformer une somme algébrique en un produit.

On peut utiliser les règles de distributivité : $ab + ac = a(b + c)$; $ab - ac = a(b - c)$.

On peut utiliser les identités remarquables :

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 ; \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 ; \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Exemples :

$$A = (12x + 3)(2x - 7) - (2x - 7)(2x - 7)$$

$$= (2x - 7)[(12x + 3) - (2x - 7)]$$

$$= (2x - 7)[12x + 3 - 2x + 7]$$

$$A = (2x - 7)(10x + 10).$$

Factorisation de $B = 9x^2 - 25$

$$B = (3x)^2 - 5^2 \quad \text{Bien identifier les termes } a \text{ et } b.$$

$$B = (3x - 5)(3x + 5).$$

Test

1 **QCM** Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. $(2x - 3)^2$ est égal à :

a. $4x^2 - 9$

b. $4x^2 - 12x + 9$

c. $4x^2 - 12x - 9$

d. $2x^2 - 12x + 9$

2. $(x - 3)(x + 3) - (x + 2)(2x - 3)$ a pour développement :

a. $-x^2 - x - 3$

b. $-x^2 - x + 15$

c. $-x^2 - x - 15$

d. $-x^2 - x + 3$

3. Une factorisation de $4x^2 - 81$ est :

a. $(4x - 9)(4x + 9)$

b. $(2x + 9)(2x - 9)$

c. $(2x - 9)^2$

d. $(4x - 9)^2$

4. $(2x + 5)(2x - 3) - (2x + 5)(x + 4) + 2x + 5$ a pour forme factorisée :

a. $(2x + 5)(x - 6)$

b. $(2x + 5)(x + 2)$

c. $(2x + 5)(x - 7)$

d. $(2x + 5)^2(x - 6)$

Applications directes

2 On considère l'expression

$$E = (x + 2)(x - 3) + (x - 3).$$

1. Développer et réduire E .

2. Calculer E pour $x = 3$, puis pour $x = \sqrt{2}$.

3. Factoriser E .

3 On donne : $D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2$.

1. Développer et réduire D .

2. Factoriser D .

4 On considère l'expression :

$$E = 9x^2 - 25 + (3x - 5)(2x + 15).$$

1. Développer et réduire l'expression E .

2. a. Factoriser $9x^2 - 25$.

b. En utilisant la question a., factoriser l'expression E .

Corrigés

Test

- 1** 1. $(2x - 3)^2 = (2x^2) - 2 \times 2x \times 3 + 3^2$
 $= 4x^2 - 12x + 9$: réponse **b**.
2. $(x - 3)(x + 3) - (x + 2)(2x - 3)$
 $= x^2 - 3^2 - (2x^2 - 3x + 4x - 6)$
 $= x^2 - 9 - 2x^2 + 3x - 4x + 6$
 $= -x^2 - x - 3$: réponse **a**.
3. $4x^2 - 81 = (2x)^2 - 9^2 = (2x + 9)(2x - 9)$: réponse **b**.
4. $(2x + 5)(2x - 3) - (2x + 5)(x + 4) + 2x + 5$
 $= (2x + 5)(2x - 3) - (2x + 5)(x + 4) + (2x + 5) \times 1$
 $= (2x + 5)[(2x - 3) - (x + 4) + 1]$
 $= (2x + 5)(x - 6)$: réponse **a**.

Applications directes

2 1. $E = (x + 2)(x - 3) + (x - 3)$
 $= x^2 - 3x + 2x - 6 + x - 3.$

On obtient $E = x^2 - 9$.

2. Pour $x = 3$, on a :

$$E = (3 + 2)(3 - 3) + (3 - 3) = 5 \times 0 + 0.$$

Pour $x = 3$, on a $E = 0$.

Pour $x = \sqrt{2}$, on a $E = \sqrt{2}^2 - 9 = 2 - 9.$

Pour $x = \sqrt{2}$, on a $E = -7$.

N.B. Ici, il est préférable de calculer la valeur de l'expression E pour la valeur $\sqrt{2}$ à partir de l'expression développée obtenue à la question 1..

3. $E = (x + 2)(x - 3) + (x - 3) \times 1$
 $= (x - 3)[(x + 2) + 1].$

On obtient $E = (x - 3)(x + 3)$.

N.B. On peut aussi factoriser l'expression à partir de la forme développée obtenue à la première question à l'aide de l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

3 1. $D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)^2$
 $= 10x - 2x^2 - 15 + 3x + 4x^2 - 12x + 9.$

On obtient : $D = 2x^2 + x - 6$.

2. $D = (2x - 3)(5 - x) + (2x - 3)(2x - 3)$
 $= (2x - 3)[(5 - x) + (2x - 3)].$

On obtient : $D = (2x - 3)(x + 2)$.

4 1. $E = 9x^2 - 25 + (3x - 5)(2x + 15)$
 $= 9x^2 - 25 + 6x^2 + 45x - 10x - 75$

On a donc $E = 15x^2 + 35x - 100$.

2. a. $9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x - 5)(3x + 5)$.

b. $E = 9x^2 - 25 + (3x - 5)(2x + 15)$
 $= (3x - 5)(3x + 5) + (3x - 5)(2x + 15)$
 $= (3x - 5)[(3x + 5) + (2x + 15)]$

On a donc $E = (3x - 5)(5x + 20)$.