Techniques de base

13. Parallélogrammes

L'essentiel

1. Parallélogramme
- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses deux paires de côtés opposés ont même longueur.
- Un quadrilatère est un parallélogramme si, et seulement si, ses diagonales ont le même milieu.

2. Rectangle
- Un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, il possède un angle droit.
- Un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales ont la même longueur.

3. Losange
- Un parallélogramme est un losange si, et seulement si, deux côtés consécutifs sont de même longueur.
- Un parallélogramme est un rectangle si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires.

4. Carré
- Un parallélogramme est un carré si, et seulement si, il est à la fois un rectangle et un losange.

Test

1 **QCM** Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. Un quadrilatère a ses diagonales qui sont deux diamètres non perpendiculaires d'un même cercle :	**a.** c'est un carré	**b.** c'est un losange	**c.** c'est un rectangle	**d.** c'est un parallélogramme quelconque
2. *MNPQ* est un losange. On peut affirmer que :	**a.** $MP = NQ$	**b.** (MP) et (NQ) sont perpendiculaires	**c.** $[MQ]$ et $[PN]$ ont le même milieu	
3. *ABCD* est un losange avec $AB = 4$ cm et $AC = 6$ cm. Le périmètre du losange vaut :	**a.** 10 cm	**b.** 16 cm	**c.** 20 cm	**d.** 24 cm
4. *RSTU* est un carré. Quelle affirmation est fausse ?	**a.** Il a quatre axes de symétrie	**b.** Ses diagonales sont de la même longueur	**c.** Ses diagonales sont perpendiculaires	**d.** $RS = RT$

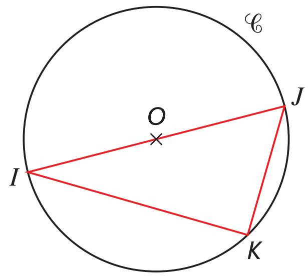
Applications directes

2 *RSTU* est un parallélogramme avec $RS = 6$ cm, $ST = 8$ cm et $RT = 10$ cm.
1. Montrer que le triangle *RST* est rectangle en *S*.
2. En déduire la nature exacte de *RSTU*.

3 **1.** Tracer un triangle *EFG* isocèle en *F*, tel que $EF = 6$ cm et $\widehat{EFG} = 34°$. Construire le point *K* tel que *FEKG* soit un parallélogramme.
2. Quelle est la nature du quadrilatère *EFGK* ?

4 $[CR]$ et $[AE]$ sont deux diamètres d'un cercle de centre *O* et de rayon 3 cm.
1. Montrer que *CARE* est un parallélogramme, puis un rectangle.
2. On suppose que, de plus, les diamètres $[CR]$ et $[AE]$ sont perpendiculaires. Préciser la nature de *CARE*.

5 *La figure ci-après n'est pas en vraie grandeur ; on ne demande pas de la reproduire.*
On considère un cercle *C* de centre *O* et de diamètre 8 cm.
I et *J* sont deux points de *C* diamétralement opposés ;
K est un point de *C* tel que $JK = 4$ cm.



1. Préciser la nature du triangle *IJK*. Justifier la réponse.
2. Préciser la nature du triangle *OJK*. Justifier la réponse.
3. On appelle *R* le symétrique de *K* par rapport à la droite (IJ).
Démontrer que le quadrilatère *ROKJ* est un losange.

6 L'unité est le centimètre.
1. Tracer un triangle *OBC* rectangle en *O* tel que $OB = 1{,}5$ et $OC = 3$.
2. a. Construire le point *D* symétrique de *B* par rapport à *O*.
b. Construire le point *A* tel que *ABCD* soit un parallélogramme.
3. Démontrer que *O* est le milieu de $[AC]$.
4. Démontrer que *ABCD* est un losange.

Techniques de base

13. Parallélogrammes

Corrigés

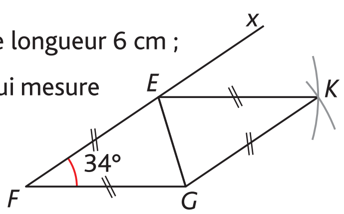
Test

1 **1.** Étant deux diamètres d'un cercle, les diagonales ont le même milieu et la même longueur. La figure est un rectangle : réponse **c.**
2. *MNPQ* est un losange donc ses diagonales (MP) et (NQ) sont perpendiculaires : réponse **b.**
3. *ABCD* est un losange avec $AB = 4$ cm. Le périmètre du losange vaut $4AB$, soit 16 cm : réponse **b.**
4. Si *RSTU* est un carré, alors le côté $[RS]$ n'a pas la même longueur que la diagonale $[RT]$: réponse **d.**

Applications directes

2 **1.** On a $RS^2 + ST^2 = 6^2 + 8^2 = 100$
et $RT^2 = 10^2 = 100$.
On constate que $RS^2 + ST^2 = RT^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
***RST* est un triangle rectangle en *S*.**
2. *RSTU* est un parallélogramme avec l'angle en *S* droit.
Si un parallélogramme possède un angle droit, alors c'est un rectangle. ***RSTU* est un rectangle.**

3 **1.** On peut :
- tracer un segment $[FG]$ de longueur 6 cm ;
- construire un angle $\widehat{xFG}$ qui mesure 34° ;
- placer le point *E* sur $[Fx)$ à 6 cm du point *F* ;



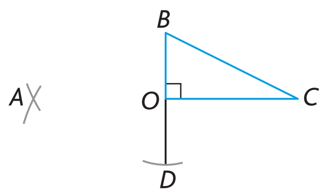
- tracer deux arcs de cercles de rayon 6 cm et de centres *E* et *G* qui se coupent en un point *K* distinct du point *F*.

2. Le quadrilatère *EFGK* est un parallélogramme.
De plus le triangle *EFG* est isocèle en *F*, donc on a $EF = FG$.
Si un parallélogramme possède deux côtés consécutifs de même longueur, alors c'est un losange.
Le quadrilatère *EFGK* est un losange.

4 **1.** Les diagonales $[CR]$ et $[AE]$ de *CARE* sont deux diamètres d'un cercle de centre *O*, donc elles ont le même milieu *O*.
Si un quadrilatère possède des diagonales de même milieu, alors c'est un parallélogramme.
***CARE* est un parallélogramme.**
De plus, les diagonales $[CR]$ et $[AE]$ de *CARE*, qui sont deux diamètres d'un cercle, ont la même longueur.
Si un parallélogramme possède des diagonales de la même longueur, alors c'est un rectangle. ***CARE* est un rectangle.**
2. *CARE* est un parallélogramme dont les diagonales $[CR]$ et $[AE]$ sont perpendiculaires.
Si un parallélogramme possède des diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. ***CARE* est un losange.**
Etant à la fois rectangle et losange, ***CARE* est un carré.**

5 **1.** I et J sont deux points de *C* diamétralement opposés et *K* est sur *C* donc $[IJ]$ est un diamètre du cercle *C* circonscrit à *IJK*.
Si un côté d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au côté diamètre. **Le triangle *IJK* est rectangle en *K*.**
2. *O* est le centre du cercle *C* de diamètre 8 cm. J et *K* sont deux points de ce cercle donc $[OJ]$ et $[OK]$ sont deux rayons de longueur 4 cm.
On a aussi $JK = 4$. On a donc $OJ = OK = JK$.
Par définition, **le triangle *OJK* est équilatéral.**
3. *R* est le symétrique de *K* par rapport à la droite (IJ).
O et J sont leurs propres symétriques par rapport à la droite (IJ).
Les segments $[OK]$ et $[OR]$ sont symétriques par rapport à la droite (IJ), ainsi que les segments $[JK]$ et $[JR]$.
Si deux segments sont symétriques, alors ils ont la même longueur.
On a donc $OR = OK = 4$ cm et $JR = JK = 4$ cm.
Les quatre côtés de *ROKJ* mesurent 4 cm.
Si un quadrilatère possède quatre côtés de la même longueur, alors c'est un losange. ***ROKJ* est un losange**.

6 **1. 2. a.** Pour construire le point *D* symétrique de *B* par rapport à *O*, on peut tracer un arc de cercle de centre *O* et de rayon *OB* qui coupe (BO) en un point autre que *B*.



b. Pour construire le point *A* tel que *ABCD* soit un parallélogramme, on peut tracer un arc de cercle de centre *D* et de rayon *BC* et un arc de centre *B* et de rayon *CD* qui se coupent en *A*.
3. • Le point *D* est le symétrique de *B* par rapport à *O*.
Par définition, le point *O* est le milieu de $[BD]$.
• *ABCD* est un parallélogramme. Si une figure est un parallélogramme, alors ses diagonales ont le même milieu.
Les diagonales $[BD]$ et $[AC]$ ont le même milieu.
• On conclut que **le point *O* est le milieu de** $[AC]$.
4. *ABCD* est un parallélogramme. De plus, comme le triangle *BOC* est rectangle en *O* avec *D* sur (OB) et *A* sur (OC), les diagonales de *ABCD* sont perpendiculaires.
Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange. ***ABCD* est un losange**.