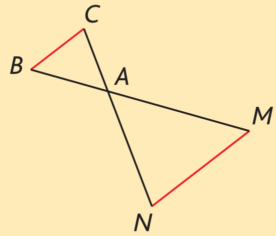
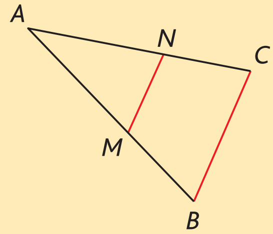
Techniques de base

15. Triangles et parallèles

L'essentiel

● **1. Théorème de Thalès :**

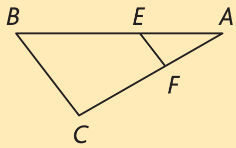




Si ABC est un triangle avec M un point sur (AB) et N un point sur (AC) tels que (MN) soit parallèle à (BC),

alors : $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ ← côtés du triangle AMN ← côtés du triangle ABC

Exemple :



Dans ABC, on a E sur $[AB]$, F sur $[AC]$ tels que $AE = 2$, $AB = 5$, $AC = 4$, $EF = 1$ et (EF) parallèle à (BC).

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{EF}{BC}$, soit $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AF}{4} = \dfrac{1}{BC}$.

D'une part, on a $\dfrac{2}{5} = \dfrac{AF}{4}$, soit $\dfrac{2}{5} \times 4 = AF = \dfrac{8}{5}$. On obtient $\mathbf{AF = 1{,}6}$.

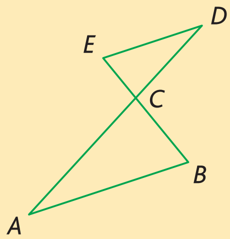
D'autre part, on a $\dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{BC}$. Par produit en croix, on a $2 \times BC = 1 \times 5$, soit $BC = 5 \div 2$. On obtient $\mathbf{BC = 2{,}5}$.

● **2. Réciproque du théorème de Thalès :**

Si ABC est un triangle, M un point sur (AB) et N un point sur (AC),

tels que $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$ ← côtés du triangle AMN ← côtés du triangle ABC et A, M, B et A, N, C sont dans le même ordre relatif alors (MN) est parallèle à (BC).

Exemple :



Dans la figure ci-contre, on a : $CE = 5$, $CD = 12$, $CA = 18$, $CB = 7{,}5$.

ABC est un triangle avec D sur (AC) et E sur (AB).

On a $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$ et $\dfrac{EC}{BC} = \dfrac{7}{7{,}5} = \dfrac{2{,}5 \times 2}{2{,}5 \times 2} = \dfrac{2}{3}$.

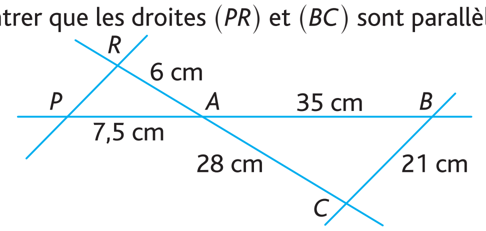
On constate que $\dfrac{DC}{AC} = \dfrac{EC}{BC}$.

De plus D, C et A sont dans le même ordre relatif que E, C et B.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **(DE) et (AB) sont parallèles.**

Applications directes

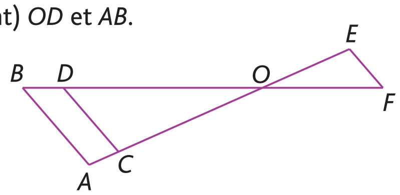
1 Deux droites (PB) et (RC) sont sécantes en un point A. Démontrer que les droites (PR) et (BC) sont parallèles.



2 Sur le dessin ci-dessous, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les points A, C, O et E sont alignés ainsi que les points B, D, O et F. De plus : $CO = 3$ cm ; $AO = 3{,}5$ cm ; $OB = 4{,}9$ cm ; $CD = 1{,}8$ cm ; $OF = 2{,}8$ cm et $OE = 2$ cm.

1. Calculer (en justifiant) OD et AB.

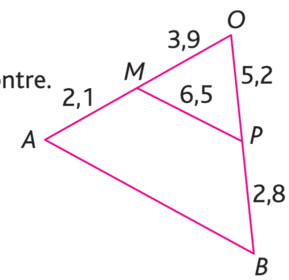
2. Prouver que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.



3 On considère la figure ci-contre.

1. Montrer que les droites (MP) et (AB) sont parallèles.

2. Calculer la longueur AB.



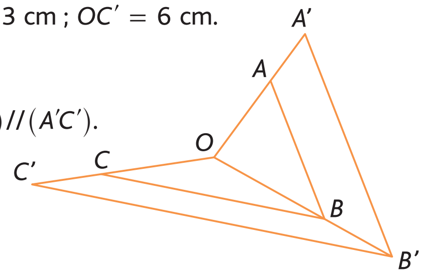
4 Sur le dessin ci-dessous, les points O, A et A' sont alignés ; les points O, B et B' sont alignés ; les points O, C et C' sont alignés.

On a aussi $(AB)//(A'B')$ et $(BC)//(B'C')$; $OB = 4$ cm ; $OB' = 5$ cm ; $OA = 3$ cm ; $OC' = 6$ cm.

1. Calculer OC.

2. Calculer OA'.

Démontrer que $(AC)//(A'C')$.



15. Triangles et parallèles

Corrigés

Applications directes

1 ABC est un triangle avec P un point sur (AB) et R un point sur (AC).

On a $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{7{,}5}{35} = \dfrac{15}{70} = \dfrac{5 \times 3}{5 \times 14} = \dfrac{3}{14}$

et $\dfrac{AR}{AC} = \dfrac{6}{28} = \dfrac{2 \times 3}{2 \times 14} = \dfrac{3}{14}$.

On constate que $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AR}{AC}$.

De plus, l'ordre relatif des points A, P et B est le même que celui des points A, R et C.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (PR) et (BC) sont parallèles.**

2 **1.** AOB est un triangle avec le point D sur (OB), le point C sur (OA) et la droite (DC) parallèle à la droite (BA).

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{OD}{OB} = \dfrac{OC}{OA} = \dfrac{DC}{BA}$, soit $\dfrac{OD}{4{,}9} = \dfrac{3}{3{,}5} = \dfrac{1{,}8}{AB}$.

D'une part, on fait $OD = \dfrac{3}{3{,}5} \times 4{,}9$, soit $\boldsymbol{OD = 4{,}2}$ **cm.**

D'autre part, par produits en croix, on a $3 \times AB = 1{,}8 \times 3{,}5$.

On fait $AB = 6{,}3 \div 3$. **On a $\boldsymbol{AB = 2{,}1}$ cm.**

2. OAB est un triangle avec E un point sur (OA), F un point sur (OB).

On a $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{3{,}5}{2} = 1{,}75$ et $\dfrac{OB}{OF} = \dfrac{4{,}9}{2{,}8} = 1{,}75$.

On constate que $\dfrac{OA}{OE} = \dfrac{OB}{OF}$.

De plus, l'ordre relatif des points A, O et E est le même que celui des points B, O et F.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (AB) sont parallèles.**

3 **1.** OAB est un triangle avec M sur $[OA]$ et P sur $[OB]$.

On a donc $OA = OM + MA = 3{,}9 + 2{,}1 = 6$

et $OB = OP + PB = 5{,}2 + 2{,}8 = 8$.

On a aussi $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{3{,}9}{6} = 0{,}65$ et $\dfrac{OP}{OB} = \dfrac{5{,}2}{8} = 0{,}65$.

On constate que $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OP}{OB}$.

L'ordre relatif de O, M et A est le même que celui de O, P et B.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (MP) et (AB) sont parallèles.**

2. ABO est un triangle avec M sur (OA), P sur (OB) et (MP) parallèle à (AB).

D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{OM}{OA} = \dfrac{OP}{OB} = \dfrac{MP}{AB}$,

soit $\dfrac{3{,}9}{6} = \dfrac{6{,}5}{AB}$.

Par produits en croix, on a $3{,}9\ AB = 6 \times 6{,}5$,

soit $AB = 39 \div 3{,}9$.

On obtient $\boldsymbol{AB = 10}$**.**

4 **1.** OCB est un triangle avec le point C' sur (OC), le point B' sur (OB) et $(B'C')$ parallèle à (BC).

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{CB}{C'B'}$, soit $\dfrac{OC}{6} = \dfrac{4}{5}$.

On fait $OC = \dfrac{4}{5} \times 6$. On a donc $\boldsymbol{OC = 4{,}8}$ **cm.**

2. OAB est un triangle avec le point A' sur (OA), le point B' sur (OB) et $(A'B')$ parallèle à (AB).

D'après le théorème de Thalès, on a :

$\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'} = \dfrac{AB}{A'B'}$, soit $\dfrac{3}{OA'} = \dfrac{4}{5}$.

Par produits en croix, on a $15 = 4OA'$ soit $15 \div 4 = OA'$.

On a donc $\boldsymbol{OA' = 3{,}75}$ **cm.**

OAC est un triangle avec le point A' sur (OA) et le point C' sur (OC).

D'une part, on a $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OB}{OB'}$ et d'autre part,

on a $\dfrac{OC}{OC'} = \dfrac{OB}{OB'}$.

On constate que $\dfrac{OA}{OA'} = \dfrac{OC}{OC'}$.

De plus, l'ordre relatif des points O, A et A' est le même que celui des points O, C et C'.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.**