Techniques de base

14. Triangles rectangles

L'essentiel

1. Théorème de Pythagore : Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple :

Soit ABC un triangle rectangle en A avec $AB = 3$ cm et $AC = 4$ cm.
D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$, soit $BC^2 = 3^2 + 4^2$.
BC est une longueur donc $BC = \sqrt{25}$. On obtient $\mathbf{BC = 5}$ **cm.**

2. Réciproque du théorème de Pythagore : Si, dans un triangle, le carré de la longueur d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au plus grand côté.

Exemple :

Soit BDC un triangle avec $DB = 5{,}2$ cm, $BC = 4{,}8$ cm et $CD = 2$ cm.
Dans BDC, le plus grand côté est $[DB]$ avec $DB^2 = 5{,}2^2 = 27{,}04$ et $DC^2 + BC^2 = 4{,}8^2 + 2^2 = 27{,}04$.
On constate que $DB^2 = DC^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, ***DBC* est rectangle en *C*.**

3. Triangle rectangle et cercle

- Si un triangle est rectangle, alors le centre de son cercle circonscrit est le milieu de l'hypoténuse.
- Si un côté d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au côté diamètre.

Test

1 **QCM** Pour chaque question, trouver la bonne réponse.

1. ABC est un triangle rectangle en A avec $AB = 5$ et $AC = 12$. Quelle est la longueur BC ?	**a.** 17	**b.** 169	**c.** 13	**d.** 34
2. PMN est un triangle rectangle en P avec $PN = 5$ et $MN = 12$. Combien mesure $[PM]$?	**a.** 13	**b.** environ 10,9	**c.** 7	**d.** 14
3. Dans le triangle ABC, on a $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 9$ cm. Quelle phrase est juste ?	**a.** ABC est rectangle en A	**b.** ABC est rectangle en B	**c.** ABC est rectangle en C	**d.** ABC n'est pas rectangle

Applications directes

2 Soit ABC un triangle avec $AC = 4\sqrt{5}$, $AB = 2\sqrt{5}$ et $BC = 10$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

3 Soit un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 6$ cm et $AC = 8$ cm. Montrer que $BC = 10$ cm.

4 Soit RST un triangle rectangle en T avec $[RS]$ de longueur 10 cm et $[RT]$ de longueur 9 cm.
Calculer la longueur TS arrondie au mm.

5 Les côtés d'un triangle mesurent 30, 40 et 50.
Montrer que ce triangle est rectangle.

6 **1.** Construire le triangle EFG tel que $EF = 12$ cm, $EG = 5$ cm et $FG = 13$ cm.
2. Prouver que le triangle EFG est rectangle en E.

7 **1.** Tracer un segment $[EF]$ de longueur 7 cm et de milieu O. Tracer le cercle de diamètre $[EF]$ puis placer un point G sur le cercle tel que $EG = 4$ cm.
2. Démontrer que le triangle EFG est un triangle rectangle en G.
3. Calculer une valeur approchée de la longueur FG, arrondie au millimètre.

8 On considère un cercle de diamètre $[AB]$ et un point C appartenant à ce cercle.
1. Déterminer la nature du triangle ABC.
2. On donne $AC = 39$ mm et $BC = 52$ mm.
Démontrer que $AB = 65$ mm.
3. Le point D est tel que : $AD = 25$ mm et $BD = 60$ mm.
Le triangle ABD est-il rectangle ?

Techniques de base

14. Triangles rectangles

Corrigés

Test

1 1. D'après le théorème de Pythagore,
$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 5^2 + 12^2 = 169$,
donc $BC = 13$: réponse c.
2. D'après le théorème de Pythagore,
$MP^2 = MN^2 - PN^2 = 12^2 - 5^2 = 119$,
donc $MP = \sqrt{119}$: réponse b.
3. $AC^2 = 81$ et $AB^2 + BC^2 = 80$ donc, en raisonnant par l'absurde, on montre que ABC n'est pas rectangle : réponse d.

Applications directes

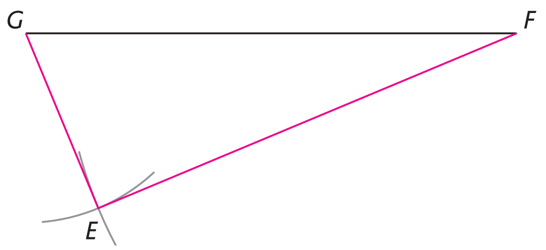
2 $AC^2 = (4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$;
$AB^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$;
$BC^2 = 10^2 = 100$.
On constate que $80 + 20 = 100$,
c'est-à-dire que $AC^2 + AB^2 = BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle *ABC* est rectangle en A.

3 ABC est un triangle rectangle en A.
D'après le théorème de Pythagore,
$BC^2 = AB^2 + AC^2$, soit $BC^2 = 6^2 + 8^2$.
BC est une longueur donc $BC = \sqrt{100}$.
On a bien $\mathbf{BC = 10}$ **cm.**

4 Dans RST rectangle en T, d'après le théorème de Pythagore $RS^2 = RT^2 + TS^2$, soit $10^2 = 9^2 + TS^2$.
On a $100 - 81 = TS^2$.
On fait $TS = \sqrt{19}$ cm car TS est une longueur.
On a donc $\mathbf{TS = 4{,}4}$ **cm au mm près.**

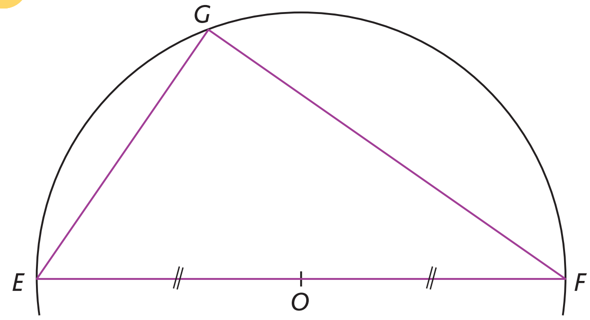
5 Nommons ABC le triangle avec $AB = 30$, $BC = 40$ et $AC = 50$.
Dans le triangle ABC, on a $AC^2 = 50^2 = 2\,500$
et $AB^2 + BC^2 = 30^2 + 40^2 = 2\,500$.
On constate que $AC^2 = AB^2 + BC^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
***ABC* est rectangle en *B*.**

6 1.



2. Dans le triangle EFG, on a $FG^2 = 13^2 = 169$
et $EF^2 + EG^2 = 12^2 + 5^2 = 169$.
On constate que $FG^2 = EF^2 + EG^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle *EFG* est rectangle en *E*.

7 1.



2. $[EF]$ est un diamètre du cercle circonscrit à EFG.
Si un côté d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au diamètre.
Le triangle *EFG* est rectangle en *G*.
3. Dans EFG rectangle en G, d'après le théorème de Pythagore, $EF^2 = EG^2 + GF^2$, soit $7^2 = 4^2 + FG^2$.
On fait $49 - 16 = FG^2$.
On a $FG = \sqrt{33}$ cm car c'est une longueur.
On a donc $\mathbf{FG = 5{,}7}$ **cm au mm près.**

8 1. $[AB]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC.
Si un côté d'un triangle est un diamètre de son cercle circonscrit, alors ce triangle est rectangle au sommet opposé au diamètre.
***ABC* est rectangle en *C*.**
2. ABC est un triangle rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore, on a $AB^2 = AC^2 + BC^2$, soit $AB^2 = 39^2 + 52^2$.
On a donc $AB^2 = 4\,225$ puis $AB = \sqrt{4\,225}$.
On a bien $\mathbf{AB = 65}$ mm.
3. Dans ABD, on a $AD^2 + BD^2 = 25^2 + 60^2 = 4\,225$ et $AB^2 = 4\,225$. On constate que $AD^2 + BD^2 = AB^2$.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
le triangle *ABD* est rectangle en *D*.